INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS EXTERNE POUR L'EMPLOI D'ÉLÈVE-ATTACHÉ

et

CONCOURS D'ENTRÉE A L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

(Division des cadres de gestion statistique)

Juin 1986 — Option A

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 heures

NOTATIONS ET RAPPELS.

1. Dans ce problème $M_n(\mathbb{R})$ (resp. $S_n(\mathbb{R})$) désigne l'espace vectoriel des matrices carrées (respectivement symétriques) à n lignes et n colonnes, à coefficients réels.

Si A est une matrice à coefficients réels, ${}^tA$ désigne la matrice transposée. I_n est la matrice unité d'ordre n.

Si A est une matrice carrée et si P est le polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$,

$P(A)$ désigne la matrice $a_0 I_n + \sum_{i=1}^{m} a_i A^i$.

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels et à une indéterminée.

Si $p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_p[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.

2. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, on désignera par φ_A l'application de $\mathbb{R}$ dans $M_n(\mathbb{R})$ solution de l'équation différentielle :

$$\varphi' = A.\varphi \text{ et telle que } \varphi_A(0) = I_n.$$

On admettra que : $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_A(u+v) = \varphi_A(u).\varphi_A(v)$.

$C(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions numériques continues sur $\mathbb{R}$.

$C(\mathbb{R}^+)$ désigne l'ensemble des fonctions numériques continues sur $\mathbb{R}^+$.

3. Si $M \in M_n(\mathbb{R})$, on désignera par $\mathrm{Ker}(M)$ l'ensemble des vecteurs V appartenant à $\mathbb{R}^n$, tels que $MV = (0)$ (où (0) est le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$) et par $\mathrm{Im}(M)$ l'ensemble des vecteurs de la forme MV où $V \in \mathbb{R}^n$.

4. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, on appellera polynôme minimal $\Pi_A(X)$ de A, le polynôme unitaire (non nul) de plus bas degré tel que $\Pi_A(A)$ soit égal à la matrice nulle.

Dans ce problème on sera amené à considérer des expressions de la forme $\int_a^b M(t)\,dt$ où $t \longrightarrow M(t)$ est une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $M_n(\mathbb{R})$.

On admettra que si $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\int_a^b M(t)\,A\,dt = \left(\int_a^b M(t)\,dt\right) A$ et $\int_a^b AM(t)\,dt = A\left(\int_a^b M(t)\,dt\right)$.

I

Soit $C \in M_n(\mathbb{R})$, on pose $S = C\,{}^tC$.

1° Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n \quad {}^tX\,S\,X \in \mathbb{R}^+$.

2° Montrer que ${}^tX\,S\,X = 0 \Leftrightarrow X \in \mathrm{Ker}({}^tC)$.

3° Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(S) \oplus \mathrm{Im}(S)$.

Tournez la page S. V. P.

Page 97-1 1986 Ecole Nat. de la Stat. et de l'Adm. Economique Concours M.Math 1

4° On considère maintenant une application continue $x \longmapsto C(x)$, de $\mathbb{R}^+$ dans $M_n(\mathbb{R})$; pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on pose $S(x) = C(x)\,{}^tC(x)$ et $W(x) = \int_0^x S(u)\,du$ (W est ainsi une application de $\mathbb{R}^+$ dans $M_n(\mathbb{R})$).

a. Montrer que $x \longmapsto W(x)$ est une application de $\mathbb{R}^+$ dans $S_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{N}$ définie par $x \longmapsto \text{rang}(W(x))$ est croissante.

5° On pose $\mathcal{W} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^+} \text{Im } W(x)$, $\mathcal{K} = \bigcap_{x \in \mathbb{R}^+} \text{Ker } W(x)$.

Montrer que $\mathcal{W}$ et $\mathcal{K}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ et que $\mathcal{W} \oplus \mathcal{K} = \mathbb{R}^n$.

II

Soient A une matrice non nulle de $M_n(\mathbb{R})$ et φ_A définie comme au point 2 des rappels.

On désigne par $\mathcal{A}$ la sous-algèbre de $M_n(\mathbb{R})$ engendrée par A, c'est-à-dire l'ensemble des matrices de la forme P(A), $P \in \mathbb{R}[X]$.

1° Montrer que $\mathcal{A} = \{ P(A) \}_{P \in \mathbb{R}_{k-1}[X]}$ si k est le degré du polynôme minimal $\Pi_A(X)$.

2° *a.* Montrer que $\forall u \in \mathbb{R}$, $\varphi_A(u) \in \mathcal{A}$.

b. Montrer que $\forall u \in \mathbb{R}$, ${}^t[\varphi_A(u)] = \varphi_{{}^tA}(u)$.

3° Soient $(A, B) \in M_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ fixés et g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on désigne par $S(g)$ le système différentiel linéaire :

$$X' = AX + gB.$$

La fonction $u \longmapsto X(u)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ sera dite solution de $S(g)$ si $\forall u \in \mathbb{R}$:

$$X'(u) = A\,X(u) + g(u)\,B.$$

Montrer que les solutions de $S(g)$ sont les fonctions de la forme :

$$u \longmapsto X(u) = \varphi_A(u)\,Y + \left(\int_0^u g(\sigma)\,\varphi_A(u - \sigma)\,d\sigma \right) B$$

(où Y représentera donc X(0)).

4° Le vecteur Y est dit (A, B) - contrôlable s'il existe $(g, x) \in C(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+$ tels que, si X est la solution de $S(g)$ qui vérifie $X(0) = Y$, alors $X(x) = (0)$.

a. Montrer que, si Y est (A, B) - contrôlable, alors il existe $(g, x_1) \in C(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+$ tels que $\forall x \geqslant x_1$, $X(x) = 0$.

b. Montrer que l'ensemble des vecteurs (A, B) - contrôlables est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, que l'on désignera par Γ.

5° Quel que soit $\sigma \in \mathbb{R}^+$, on pose $C(\sigma) = \varphi_A(-\sigma)\,B$ et quel que soit $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $W(x) = \int_0^x C(\sigma)\,{}^tC(\sigma)\,d\sigma$.

Montrer que $\mathcal{W} \subset \Gamma$, $\mathcal{W}$ définie comme en I. 5°. (On pourra considérer la fonction $g : \sigma \longmapsto -\,{}^tB\,\varphi_{{}^tA}(-\sigma)\,Z$ où Z est un vecteur que l'on choisira convenablement).

6° Soit $Y \in \mathcal{K}$, où $\mathcal{K}$ désigne l'espace vectoriel défini au I. 5°.

a. Montrer qu'il existe $x_2 \in \mathbb{R}^+$ tel que ${}^tY\,W(x_2)\,Y = 0$.

b. Montrer que, $\forall x \in [0, x_2]$ ${}^tC(x)\,Y = (0)$.

c. En déduire que : $\mathcal{K} \cap \Gamma = \{0\}$.

7° *a.* Montrer que $\mathcal{W} + \Gamma \subset \mathcal{W}$.

b. En déduire l'égalité $\Gamma = \mathcal{W}$.

III

1° Après avoir calculé les dérivées successives $\varphi_A^{(k)}(0)$,

montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} {}^tB\,\varphi_{{}^tA}(-\sigma)\;V = 0 \\ \forall\,\sigma \in \mathbb{R}^+ \end{array}\right\} \Rightarrow {}^tBV = {}^t(AB)V = \ldots = {}^t(A^{n-1}B)V = 0.$$

2° Montrer que : $\Gamma = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ le rang du système :

$$(B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B) \text{ est égal à } n.$$

On suppose (jusqu'à la fin du III) *que le polynôme minimal* $\Pi_A(X)$ *est de degré* n.

Tournez la page S. V. P.

3° Montrer qu'il existe un vecteur $T \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$(T, AT, A^2 T, ..., A^{n-1} T)$ forme une base de $\mathbb{R}^n$.

4° Montrer que, si $V = P(A)T$,
$(V, AV, ..., A^{n-1} V)$ base de $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow P(X) \wedge \Pi_A(X) = 1$, où $\wedge$ désigne le plus grand commun diviseur.

IV

Application :

Soit :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1° Déterminer les valeurs propres de M et le polynôme minimal $\Pi_M(X)$ de M.

2° Déterminer un vecteur $T \in \mathbb{R}^4$ tel que (T, MT, M^2T, M^3T) forme une base de $\mathbb{R}^4$.

3° Déterminer l'ensemble des vecteurs B tels que tout vecteur $Y \in \mathbb{R}^4$ soit (M, B) - contrôlable.